

2020

MATHEMATICS (General)

Paper Code : I - A & B

[New Syllabus]

Important Instructions for Multiple Choice Question (MCQ)

- Write Subject Name and Code, Registration number, Session and Roll number in the space provided on the Answer Script.

Example : Such as for Paper III-A (MCQ) and III-B (Descriptive).

Subject Code :

III	A	&	B
-----	---	---	---

Subject Name :

- Candidates are required to attempt all questions (MCQ). Below each question, four alternatives are given [i.e. (A), (B), (C), (D)]. Only one of these alternatives is 'CORRECT' answer. The candidate has to write the Correct Alternative [i.e. (A)/(B)/(C)/(D)] against each Question No. in the Answer Script.

Example — If alternative A of 1 is correct, then write :

1. — A

- There is no negative marking for wrong answer.

মাল্টিপল চয়েস প্রশ্নের (MCQ) জন্য জরুরী নির্দেশাবলী

- উত্তরপত্রে নির্দেশিত স্থানে বিষয়ের (Subject) নাম এবং কোড, রেজিস্ট্রেশন নম্বর, সেশন এবং রোল নম্বর লিখতে হবে।

উদাহরণ — যেমন Paper III-A (MCQ) এবং III-B (Descriptive)।

Subject Code :

III	A	&	B
-----	---	---	---

Subject Name :

- পরীক্ষার্থীদের সবগুলি প্রশ্নের (MCQ) উত্তর দিতে হবে। প্রতিটি প্রশ্নে চারটি করে সম্ভাব্য উত্তর, যথাক্রমে (A), (B), (C) এবং (D) করে দেওয়া আছে। পরীক্ষার্থীকে তার উত্তরের স্বপক্ষে (A)/(B)/(C)/(D) সঠিক বিকল্পটিকে প্রশ্ন নম্বর উল্লেখসহ উত্তরপত্রে লিখতে হবে।

উদাহরণ — যদি 1 নম্বর প্রশ্নের সঠিক উত্তর A হয় তবে লিখতে হবে :

1. – A

- ভুল উত্তরের জন্য কোন নেগেটিভ মার্কিং নেই।

Paper Code : I - A

Full Marks : 50

Time : One Hour

Notations and symbols have their usual meanings.

Choose the correct answer.

Each question carries 2 marks.

1. Let n be a positive integer and $a > b > 0$. If $a^{\frac{1}{n}}$ and $b^{\frac{1}{n}}$ are positive n th roots of a and b respectively, then which of the following is true?

(A) $a^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{1}{n}}$

(B) $a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}}$

(C) $a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}}$

(D) None of above

1. ধরা যাক n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $a > b > 0$ । যদি $a^{\frac{1}{n}}$ এবং $b^{\frac{1}{n}}$ যথাক্রমে a এবং b -এর ধনাত্মক n তম বীজ হয়, তবে কোন্ উক্তিটি সত্য?

(A) $a^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{1}{n}}$

(B) $a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}}$

(C) $a^{\frac{1}{n}} > b^{\frac{1}{n}}$

(D) উপরের কোনোটিই নয়

2. The linear Diophantine equation $ax + by = c$ has a solution if and only if —

(A) $\gcd(a, c) | b$

(B) $\gcd(a, b) | c$

(C) $\gcd(b, c) | a$

(D) $c | \gcd(a, b)$

2. রৈখিক ডাইওফ্যান্টাইন (Diophantine) সমীকরণ $ax + by = c$ -এর সমাধান থাকবে যদি এবং কেবল যদি —

- (A) $gcd(a, c)|b$
- (B) $gcd(a, b)|c$
- (C) $gcd(b, c)|a$
- (D) $c|gcd(a, b)$

3. The maximum value of $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 + \sin \theta & 1 \\ 1 + \cos \theta & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (θ is real number) is —

- (A) $\frac{1}{2}$
- (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (C) $\sqrt{2}$
- (D) $2\sqrt{3}$

3. যদি θ একটি বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 + \sin \theta & 1 \\ 1 + \cos \theta & 1 & 1 \end{vmatrix}$ -এর সর্বোচ্চ মান হবে —

- (A) $\frac{1}{2}$
- (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (C) $\sqrt{2}$
- (D) $2\sqrt{3}$

4. The curve represented by the equations $x = \sin^2 t$, $y = 2 \cos t$ is —
- (A) a parabola
 - (B) a circle
 - (C) a hyperbola
 - (D) an ellipse
4. $x = \sin^2 t$, $y = 2 \cos t$ সমীকরণদ্বয় দ্বারা যে বক্ররেখাকে নির্দেশ করে, সেটি হলো —
- (A) অধিবৃত্ত
 - (B) বৃত্ত
 - (C) পরাবৃত্ত
 - (D) উপবৃত্ত
5. The curve $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ has —
- (A) only one vertical asymptote
 - (B) only one horizontal asymptote
 - (C) exactly one vertical and one horizontal asymptote
 - (D) none of these
5. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ বক্ররেখাটির জন্য —
- (A) কেবলমাত্র একটি উল্লম্ব অসীম পথ আছে
 - (B) কেবলমাত্র একটি অনুভূমিক অসীম পথ আছে
 - (C) নির্দিষ্টভাবে একটি উল্লম্ব ও একটি অনুভূমিক অসীম পথ আছে
 - (D) কোনোটিই নয়

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}$ is

(A) $\frac{1}{p+1}$

(B) $\frac{1}{p-1}$

(C) $\frac{1}{1-p}$

(D) $\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}$ হলো —

(A) $\frac{1}{p+1}$

(B) $\frac{1}{p-1}$

(C) $\frac{1}{1-p}$

(D) $\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$

7. The value of $(1 + i)^{100}$ is —

(A) $2^{100}(\cos 100\pi + i \sin 100\pi)$

(B) $2^{100}(\cos 25\pi + i \sin 25\pi)$

(C) $2^{50}(\cos 100\pi + i \sin 100\pi)$

(D) $2^{50}(\cos 25\pi + i \sin 25\pi)$

7. $(1 + i)^{100}$ -এর মান হবে —
- (A) $2^{100}(\cos 100\pi + i \sin 100\pi)$
- (B) $2^{100}(\cos 25\pi + i \sin 25\pi)$
- (C) $2^{50}(\cos 100\pi + i \sin 100\pi)$
- (D) $2^{50}(\cos 25\pi + i \sin 25\pi)$
8. If every element of a group G is its own inverse, then G is —
- (A) finite
- (B) infinite
- (C) cyclic
- (D) abelian
8. যদি একটি দল G -এর প্রতিটি বিন্দু তার নিজের অনোন্যক হয় তবে G —
- (A) সসীম
- (B) অসীম
- (C) চক্রিক (cyclic)
- (D) অ্যাবেলিয়ান (abelian)
9. The least upper bound of the set $\{\frac{1}{n} : n \text{ is a positive integer}\}$ is —
- (A) 1
- (B) 0
- (C) -1
- (D) None of the above

9. $\{\frac{1}{n} : n \text{ হলো একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা}\}$ — এই সেটটির কমপক্ষে উপরের আবদ্ধ (Least upper bound) হলো —

- (A) 1
- (B) 0
- (C) - 1
- (D) উপরের কোনোটিই নয়

10. The polar form of a complex number is —

- (A) $r(\tan \theta + i \cot \theta)$
- (B) $r(\sec \theta + i \tan \theta)$
- (C) $r(\cos \theta + i \sin \theta)$
- (D) $r(\sin \theta + i \cos \theta)$

10. যে কোনো জটিল সংখ্যার পোলার গঠনটি হলো —

- (A) $r(\tan \theta + i \cot \theta)$
- (B) $r(\sec \theta + i \tan \theta)$
- (C) $r(\cos \theta + i \sin \theta)$
- (D) $r(\sin \theta + i \cos \theta)$

11. The values of x for which the matrix $A = \begin{bmatrix} 3-x & 2 & 2 \\ 2 & 4-x & 1 \\ -2 & -4 & -1-x \end{bmatrix}$ is singular are —

- (A) 0, 1
- (B) 1, 3
- (C) 3, 2
- (D) 0, 3

11. x -এর কোণ মানদ্বয়ের জন্য ম্যাট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} 3-x & 2 & 2 \\ 2 & 4-x & 1 \\ -2 & -4 & -1-x \end{bmatrix}$ টি সিঙ্গুলার (singular) হবে?

- (A) 0, 1
- (B) 1, 3
- (C) 3, 2
- (D) 0, 3

12. If $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ and $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$, then a vector \vec{d} which is perpendicular to both \vec{a} and \vec{b} and $\vec{c} \cdot \vec{d} = 15$ is —

- (A) $\frac{1}{3}(160\hat{i} - 5\hat{j} + 70\hat{k})$
- (B) $\frac{1}{3}(160\hat{i} - 5\hat{j} - 70\hat{k})$
- (C) $\frac{1}{3}(-160\hat{i} - 5\hat{j} + 70\hat{k})$
- (D) $\frac{1}{3}(160\hat{i} + 5\hat{j} + 70\hat{k})$

12. ধরা যাক, $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ এবং $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$, তবে ভেক্টর \vec{d} যাহা \vec{a} এবং \vec{b} উভয়ের সহিত উল্লম্ব এবং $\vec{c} \cdot \vec{d} = 15$ তাহা হলো —

(A) $\frac{1}{3}(160\hat{i} - 5\hat{j} + 70\hat{k})$

(B) $\frac{1}{3}(160\hat{i} - 5\hat{j} - 70\hat{k})$

(C) $\frac{1}{3}(-160\hat{i} - 5\hat{j} + 70\hat{k})$

(D) $\frac{1}{3}(160\hat{i} + 5\hat{j} + 70\hat{k})$

13. ... C is the midpoint of AB and P is any point outside of AB , then —

(A) $\vec{PA} + \vec{PB} = 2\vec{PC}$

(B) $\vec{PA} + \vec{PB} = \vec{PC}$

(C) $\vec{PA} + \vec{PB} + 2\vec{PC} = \vec{0}$

(D) $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0}$

13. যদি C বিন্দুটি AB -এর মধ্য বিন্দু হয় এবং AB -এর বাইরে অবস্থিত কোন বিন্দু যদি P হয় তবে —

(A) $\vec{PA} + \vec{PB} = 2\vec{PC}$

(B) $\vec{PA} + \vec{PB} = \vec{PC}$

(C) $\vec{PA} + \vec{PB} + 2\vec{PC} = \vec{0}$

(D) $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0}$

14. If the normals at two points P and Q to the parabola $y^2 = 4ax$ intersect at a third point R on the curve, then the product of the ordinates of P and Q is —

- (A) $4a^2$
- (B) $2a^2$
- (C) $-4a^2$
- (D) $8a^2$

14. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তটির P এবং Q বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বদ্বয় যদি অধিবৃত্তটির উপর তৃতীয় কোন বিন্দু R -এ ছেদ করে তা হলে P এবং Q -এর কোণটির গুণফল হবে —

- (A) $4a^2$
- (B) $2a^2$
- (C) $-4a^2$
- (D) $8a^2$

15. The angle between the lines represented by the equation $2x^2 - 7xy + 3y^2 = 0$ is —

- (A) 15°
- (B) 35°
- (C) 45°
- (D) 65°

15. $2x^2 - 7xy + 3y^2 = 0$ যুগ্ম সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের মান হবে —

- (A) 15°
- (B) 35°
- (C) 45°
- (D) 65°

16. The equation of pair of straight lines through $(0, 0)$ which is perpendicular to $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$, is —

(A) $bx^2 + 2hxy + ay^2 = 0$

(B) $bx^2 - 2hxy + ay^2 = 0$

(C) $ax^2 - 2hxy + by^2 = 0$

(D) $-ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$

16. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সরলরেখাদ্বয়ের উপর লম্ব এবং $(0, 0)$ বিন্দুগামী সরলরেখাদ্বয়ের সমীকরণ হলো —

(A) $bx^2 + 2hxy + ay^2 = 0$

(B) $bx^2 - 2hxy + ay^2 = 0$

(C) $ax^2 - 2hxy + by^2 = 0$

(D) $-ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$

17. If the angle between the straight line $x = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{\lambda}$ and the plane

$x + 2y + 3z = 4$ is $\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{5}{14}}\right)$, then the value of λ is —

(A) $\frac{2}{5}$

(B) $\frac{5}{3}$

(C) $\frac{2}{3}$

(D) $\frac{3}{2}$

17. যদি সরলরেখা $x = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{\lambda}$ এবং $x+2y+3z=4$ প্লেন মধ্যবর্তী কোণ

$\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{5}{14}}\right)$ হয়, তবে λ -এর মান হবে —

(A) $\frac{2}{5}$

(B) $\frac{5}{3}$

(C) $\frac{2}{3}$

(D) $\frac{3}{2}$

18. If $y = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^n$, then the value of $(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx}$ is —

(A) n^2y

(B) $-n^2y$

(C) $-y$

(D) n^2

18. যদি $y = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^n$ তবে $(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx}$ -এর মান —

(A) n^2y

(B) $-n^2y$

(C) $-y$

(D) n^2

19. c in Rolle's theorem for the function $f(x) = e^x \sin x, x \in [0, \pi]$ is —

(A) $\frac{\pi}{2}$

(B) $\frac{3\pi}{4}$

(C) $\frac{3\pi}{2}$

(D) π

19. $f(x) = e^x \sin x, x \in [0, \pi]$ -এর জন্য রোলস্ উপপাদ্য (Rolle's theorem) অনুসারে c -এর মান হবে —

(A) $\frac{\pi}{2}$

(B) $\frac{3\pi}{4}$

(C) $\frac{3\pi}{2}$

(D) π

20. If $f(x) = \frac{\ln(1+ax) - \ln(1-bx)}{x}, x \neq 0$, is continuous at $x = 0$, then $f(0) =$

(A) $a - b$

(B) $a + b$

(C) $\ln a - \ln b$

(D) $\ln a + \ln b$

20. যদি $f(x) = \frac{\ln(1+ax) - \ln(1-bx)}{x}$, $x \neq 0$, অপেক্ষকটি $x = 0$ বিন্দুতে সম্মত হয়

তবে $f(0) =$

- (A) $a - b$
- (B) $a + b$
- (C) $\ln a - \ln b$
- (D) $\ln a + \ln b$

21. If $y = (\tan x)^{\sin x}$, then $\frac{dy}{dx}$ is —

- (A) $\sec x + \cos x$
- (B) $\sec x + \log \tan x$
- (C) $(\tan x)^{\sin x}$
- (D) none of these

21. যদি $y = (\tan x)^{\sin x}$ হয় তবে $\frac{dy}{dx}$ হবে —

- (A) $\sec x + \cos x$
- (B) $\sec x + \log \tan x$
- (C) $(\tan x)^{\sin x}$
- (D) কোনোটিই নয়

22. The identity element in $G = \{2, 4, 6, 8\}$ under multiplication modulo 10 is —

- (A) 2
- (B) 4
- (C) 6
- (D) 8

22. $G = \{2, 4, 6, 8\}$ দলটির মডিউলো (modulo) 10 গুণফলের ভিত্তিতে অভেদমূলক (identity element)টি হল —

(A) 2

(B) 4

(C) 6

(D) 8

23. The values of p for which the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2+n^3}$ converges are —

(A) $p < 2$

(B) $p > 2$

(C) $p = 2$

(D) None of these

23. p -এর কোন্ মান (গুলির) জন্য $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2+n^3}$ অনুক্রমটি অভিসারি হবে?

(A) $p < 2$

(B) $p > 2$

(C) $p = 2$

(D) কোনোটিই নয়

24. If $b > 0$, then $\lim_{x \rightarrow b} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{b}}{x - b} =$

(A) 0

(B) $\frac{1}{2\sqrt{b}}$

(C) $2\sqrt{b}$

(D) b

24. যদি $b > 0$, তবে $\lim_{x \rightarrow b} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{b}}{x - b} =$

(A) 0

(B) $\frac{1}{2\sqrt{b}}$

(C) $2\sqrt{b}$

(D) b

25. The direction cosines for $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ are —

(A) $\frac{2}{\sqrt{45}}, \frac{4}{\sqrt{45}}, -\frac{5}{\sqrt{45}}$

(B) $\frac{4}{\sqrt{45}}, 0, -\frac{4}{\sqrt{45}}$

(C) $\frac{3}{\sqrt{45}}, \frac{2}{\sqrt{45}}, \frac{5}{\sqrt{45}}$

(D) $\frac{1}{\sqrt{45}}, \frac{2}{\sqrt{45}}, \frac{5}{\sqrt{45}}$

25. $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ -এর দিক কোসাইনগুলি হলো —

(A) $\frac{2}{\sqrt{45}}, \frac{4}{\sqrt{45}}, -\frac{5}{\sqrt{45}}$

(B) $\frac{4}{\sqrt{45}}, 0, -\frac{4}{\sqrt{45}}$

(C) $\frac{3}{\sqrt{45}}, \frac{2}{\sqrt{45}}, \frac{5}{\sqrt{45}}$

(D) $\frac{1}{\sqrt{45}}, \frac{2}{\sqrt{45}}, \frac{5}{\sqrt{45}}$

2020

MATHEMATICS (General)**Paper Code : I - B****[New Syllabus]**

Full Marks : 100

Time : Three Hours

*The figures in the margin indicate full marks.**Notations and symbols have their usual meanings.***Group - A****(Marks : 15)**Answer any *three* questions.

1. If $x = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $y = \cos \beta + i \sin \beta$ and $z = \cos \gamma + i \sin \gamma$ and if $x + y + z = 0$, then show that $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. 5
2. (a) Find the equation whose roots are the reciprocals of the roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.
- (b) If $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ are the roots of the equation $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$, then find the value of $\sum \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}$. 4+1
3. Solve the equation $x^3 - 3x - 1 = 0$ by Cardan's method. 5
4. (a) Prove that one root of the equation $27x^4 - 48x^2 - 12x + 13 = 0$ lies in $(0, 1)$ and another root lies in $(1, 2)$.
- (b) If z_1 and z_2 are two complex numbers, then show that $\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$. 3+2

5. If $x = \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right)$, then prove that $y = -i \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ix}{2}\right)$. 5

Group - B

(Marks : 15)

Answer any *three* questions.

6. (a) If $A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, then find the value of $(A + I_3)(A - I_3)$,

where I_3 is a 3×3 unit matrix.

- (b) If $\{u_n\}$ is a null sequence, then prove that $\{|u_n|\}$ is also a null sequence. 3+2

7. Solve by Cramer's rule : 5

$$2x + 3y - 3z = 0$$

$$5x - 2y + 2z = 19$$

$$x + 7y - 5z = 5$$

8. Show that the quadratic form $yz + zx + xy$ is indefinite. What is its rank? 3+2
9. Show that the set of all n th roots of unity forms a cyclic group generated by $e^{\frac{2\pi i}{n}}$. 5

10. Give the definition of a commutative group. Give an example of a commutative and a non-commutative group. 5

Group - C

(Marks : 10)

Answer any *two* questions.

11. (a) If $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are unit vectors such that $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, then find the value of $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$.
- (b) Find λ , if the vectors $\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}, \lambda\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ and $3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ are coplanar. 3+2
12. A particle acted on by constant forces $4\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ and $3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ is displaced from the point $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ to the point $5\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$. Find the work done by the resultant force. 5
13. If a unit vector \vec{a} makes angles $\frac{\pi}{3}$ with \hat{i} , $\frac{\pi}{4}$ with \hat{j} and an acute angle θ with \hat{k} , then find θ . Hence write the components of \vec{a} . 5
14. Using vector method, prove that $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$. 5

Group - D

(Marks : 25)

Answer any *five* questions.

15. Find the equation of the directrix of the conic $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$. 5
16. By suitable transformation, remove the term containing xy from the equation $11x^2 + 4xy + 14y^2 = 5$. 5
17. Show that if the polar of P with respect to an ellipse passes through Q , then the polar of Q passes through P . 5

18. If the equation $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ represents two parallel straight lines, then show that the distance between them is $2\sqrt{\frac{g^2 - ac}{a(a+b)}}$. 5
19. The perpendiculars PL , PM , PN are drawn from the point $P(a, b, c)$ to the coordinate planes. Show that the equation of the plane LMN is $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 2$. 5
20. Find the asymptotes of the hyperbola $2x^2 - xy - y^2 + 2x - 2y + 2 = 0$. 5
21. Show that the condition that the plane $ax + by + cz = 0$ may cut the cone $yz + zx + xy = 0$ in perpendicular line is $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. 5

Group - E

(Marks : 35)

Answer any *seven* questions.

22. Show that the pedal equation of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ with regard to the centre is $\frac{a^2b^2}{p^2} = a^2 + b^2 - r^2$. 5
23. If $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{for } x \neq 0 \\ 0, & \text{for } x = 0, \end{cases}$
- then show that the function f is continuous and differentiable at $x = 0$. 5

24. Show that the length of the perpendicular from the foot of the ordinate of any point on the tangent at the same point to the curve $y = c \cosh \frac{x}{c}$ is constant. 5
25. If $y = x^{n-1} \log x$, then show that $y_n = \frac{(n-1)!}{x}$. 5
26. Deduce the equation of the normal to the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ at $(a, 0)$. 5
27. If $x_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$, then show that the sequence $\{x_n\}_n$ is monotonically increasing. Also test the convergence of the sequence. 5
28. (a) Define Cauchy sequence.
- (b) If $f(x) = x(x-1)(x-2)$ and $a=0, b=\frac{1}{2}$, then find c from $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$. 1+4
29. Show that the radius of curvature at the vertex of the parabola $y^2 = 4x$ is $\frac{1}{2}$. 5
30. Find all the stationary points of the function $f(x, y) = xy(a-x-y)$ and test them for extreme values. 5
31. If $f = \sin^{-1} \left(\frac{x^2 + y^2}{x+y} \right)$ then show that $xf_x + yf_y = \tan f$. 5

বঙ্গানুবাদ

বিভাগ - ক

(মান : ১৫)

যে কোন তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

1. যদি $x = \cos \alpha + i \sin \alpha$, $y = \cos \beta + i \sin \beta$ এবং $z = \cos \gamma + i \sin \gamma$ এবং যদি $x + y + z = 0$, হয় তবে দেখাও যে $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ । 5
2. (a) $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণটির বীজের অনোন্যক যে সমীকরণের বীজ, সেই সমীকরণটি নির্ণয় কর।
(b) যদি $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$, সমীকরণটির বীজ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ হয় তবে $\sum \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}$ -এর মান নির্ণয় কর। 4+1
3. কার্ডান পদ্ধতিতে $x^3 - 3x - 1 = 0$ -এর সমাধান কর। 5
4. (a) দেখাও যে, $27x^4 - 48x^2 - 12x + 13 = 0$ সমীকরণটির একটি বীজ (0, 1)-এর মধ্যে আছে এবং অন্য একটি বীজ (1, 2)-এর মধ্যে আছে।
(b) যদি z_1 এবং z_2 দুটি জটিল সংখ্যা হয় তবে দেখাও যে, $\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ । 3+2
5. যদি $x = \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y}{2}\right)$, হয় তবে প্রমাণ কর যে, $y = -i \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ix}{2}\right)$ । 5

বিভাগ - খ

(মান : ১৫)

যে কোন তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

6. (a) যদি $A+I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, তবে $(A+I_3)(A-I_3)$ -এর মান নির্ণয় কর,

যেখানে I_3 একটি 3×3 ক্রমের একক ম্যাট্রিক্স।

(b) যদি $\{u_n\}$ একটি শূন্য (null) ক্রম হয়, তবে প্রমাণ কর যে $\{\|u_n\|\}$ -এও একটি শূন্য ক্রম হবে। 3+2

7. ক্রমারের নিয়মে সমাধান কর : 5

$$2x + 3y - 3z = 0$$

$$5x - 2y + 2z = 19$$

$$x + 7y - 5z = 5$$

8. দেখাও যে $yz + zx + xy$ এই দ্বিঘাত রূপটি অনির্দিষ্ট। এর মাত্রা (rank) কত? 3+2

9. দেখাও যে, এককের n -তম মূলদ্বয়ের সেটটি $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ সংগলিত এক চক্রীয় দল গঠন করে। 5

10. বিনিময়যোগ্য দলের (Commutative group)-এর উদাহরণসহ সংজ্ঞা দাও। একটি অবিনিময়যোগ্য দলের উদাহরণ দাও। 5

বিভাগ - গ

(মান : ১০)

যে কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

11. (a) যদি \vec{a}, \vec{b} এবং \vec{c} একক ভেক্টর হয় এবং $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, তবে $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ -এর মান নির্ণয় কর।

(b) যদি $i + j + 2k, \lambda i - j + k$ এবং $3i - 2j - k$ ভেক্টরগুলি সামতলিক (coplanar) হয় তবে λ -এর মান নির্ণয় কর। 3+2

12. যদি কোন বস্তুর উপর $4i + j - 3k$ এবং $3i + j - k$ বল প্রয়োগ দ্বারা বস্তুটির সরণ $i + 2j + 3k$ বিন্দু থেকে $5i + 4j + k$ বিন্দুতে করা হয়, তবে লব্ধ বলের কার্যক্ষমতা নির্ণয় কর। 5

13. যদি কোন একক ভেক্টর \vec{a}, i -এর সাথে $\frac{\pi}{3}$ কোণে অবস্থান করে, j -এর সাথে $\frac{\pi}{4}$ এবং k এর সাথে θ কোণে অবস্থান করে, যেখানে θ একটি সূক্ষ্মকোণ, তবে θ -এর মান নির্ণয় কর। ভেক্টর \vec{a} -এর উপাদানগুলি উল্লেখ কর। 5

14. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর, $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$. 5

বিভাগ - ঘ

(মান : ২৫)

যে কোন পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

15. $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ শংকুচ্ছেদটির নিয়ামকের সমীকরণটি লেখ। 5

16. একটি যথোপযুক্ত রূপান্তরের সহায়তায় $11x^2 + 4xy + 14y^2 = 5$ সমীকরণটি থেকে xy পদটি বিলোপ কর। 5

17. যদি কোন অধিবৃত্ত সাপেক্ষে P বিন্দুর পোলার Q বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তবে দেখাও যে, Q বিন্দুর পোলার P বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে। 5

18. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকরণটি দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা সূচিত করলে, দেখাও যে, তাদের মধ্যে দূরত্ব $2\sqrt{\frac{g^2 - ac}{a(a+b)}}$ । 5

19. যদি $P(a, b, c)$ বিন্দু থেকে স্থানাঙ্ক তলের উপর PL, PM, PN লম্ব অঙ্কন করা হয় তবে দেখাও যে LMN তলের সমীকরণটি $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 2$ হবে। 5
20. $2x^2 - xy - y^2 + 2x - 2y + 2 = 0$ পরাবৃত্তটির অনন্তস্পর্শী রেখাদ্বয় নির্ণয় কর। 5
21. যদি $ax + by + cz = 0$ তলটি $yz + zx + xy = 0$ শঙ্কুকে লম্বভাবে ছেদ করে, তবে $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ । 5

বিভাগ - ৬

(মান : ৩৫)

যে কোন সাতটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

22. দেখাও যে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের কেন্দ্রের সাপেক্ষে উহার pedal সমীকরণটি হল $\frac{a^2b^2}{p^2} = a^2 + b^2 - r^2$ । 5
23. যদি $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{for } x \neq 0 \\ 0, & \text{for } x = 0, \end{cases}$ হয় তবে দেখাও যে, $x = 0$ বিন্দুতে f অপেক্ষকটি সন্তত ও অবকলনযোগ্য। 5
24. দেখাও যে, $y = c \cosh \frac{x}{c}$ -এর যে কোন বিন্দুর কোটির পাদবিন্দু থেকে ঐ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব ধ্রুবক হবে। 5
25. যদি $y = x^{n-1} \log x$ হয় তবে দেখাও যে, $y_n = \frac{(n-1)!}{x}$ । 5

26. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের $(a, 0)$ বিন্দুতে normal-এর সমীকরণ নির্ণয় কর। 5
27. যদি $x_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$ হয় তবে দেখাও যে $\{x_n\}_n$ অনুক্রমটি ক্রমবর্ধমান। এটি অভিসারি কিনা পরীক্ষা কর। 5
28. (a) Cauchy sequence-এর সংজ্ঞা দাও।
- (b) যদি $f(x) = x(x-1)(x-2)$ এবং $a = 0, b = \frac{1}{2}$ হয় তবে c -এর মান নির্ণয় কর
যেখানে $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$ । 1+4
29. দেখাও যে $y^2 = 4x$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দুতে বক্রতা ব্যাসার্ধ (radius of curvature) $\frac{1}{2}$ হবে। 5
30. $f(x, y) = xy(a-x-y)$ অপেক্ষকটির সমস্ত স্থির বিন্দুগুলি নির্ণয় কর এবং সেগুলি গরিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ বিন্দু কিনা পরীক্ষা কর। 5
31. যদি $f = \sin^{-1}\left(\frac{x^2 + y^2}{x+y}\right)$ হয় তবে দেখাও যে, $xf'_x + yf'_y = \tan f$ । 5
-